DÉCIDER OU PROCRASTINER ?

Intuitions et paradoxes des modèles mathématiques

Quelques exemples en médecine, justice, politique ...

François Sauvageot

Mathématicien

Lycée Clemenceau & IREM - Nantes

La bonne décision …

1. Choix d’un secrétaire
2. Choix d’une place de parking
3. Dilemme du prisonnier
4. Choix social
5. Sophisme du procureur
6. Test HT21

Jeux à un(e) seul(e) joueur(se)

- Dans ces situations, il s’agit de trouver une stratégie pour une personne qui est face à une situation dont elle estime les paramètres et qui ne dépend alors que d’elle-même.
- Autrement dit on suppose que l’aléa de la situation est en quelque sorte « naturel » et ne dépend pas de la stratégie d’autres personnes.

Choix d’un secrétaire

- La directrice des relations humaines d’une entreprise veut embaucher un secrétaire.
- Une centaine de candidats se présentent tour à tour pour une audition.
- Après chaque audition, la directrice est capable de comparer le candidat qu’elle vient de voir avec les précédents, mais elle doit se décider tout de suite.
- Quelle stratégie adopter ?

Choix d’une place de parking

- Vous roulez en voiture en direction d’une conférence à l’IREM.
- Vous constatez une proportion de remplissage des places *p* de 90%.
- Faut-il se garer dès que possible ou bien est-il préférable de continuer, au risque de ne rien trouver et de devoir dépasser le cinéma, et trouver une place encore au delà ?
- Quelle stratégie employer pour espérer marcher le moins possible depuis le parking jusqu’à l’amphi ?

Modélisation

- On utilise le langage des probabilités (lois uniformes, lois de Bernoulli, espérance, espérance conditionnelle …) et éventuellement ses notations, mais on peut se convaincre des calculs à mener par un raisonnement heuristique.
- Ces calculs sont simples !

Le problème des secrétaires

- On ne recrute quelqu'un que si on tombe sur un candidat meilleur que les précédents
- Stratégies possibles : observer jusqu'au temps r, puis prendre le premier qui a un rang meilleur que les r premiers.
- Pour n grand, la stratégie optimale est pour $r \approx n/e$, i.e. $r/n \approx 37\%$.

Calculs

- Espérance de gain en recrutant le $j^{ème}$:
  $(1-\frac{1}{j+1})...(1-\frac{1}{n})$, soit j/n.
- Espérance de gain en observant r-1 fois :
  $\sum_{k\geq r}(1-\frac{1}{r})...(1-\frac{1}{k-1})\frac{1}{k}(1-\frac{1}{k+1})...(1-\frac{1}{n})$,
  soit $P_r=\frac{r-1}{n}\sum_{k\geq r}\frac{1}{k-1}$
- (P_r) est croissante jusqu'à r minimal tel que
  $\sum_{k\geq r}\frac{1}{k-1}\leq 1$, i.e. ln(n/r)≤1.

Les places de parking

- Stratégies possibles : laisser passer jusqu'à une distance de r places, puis prendre la première place libre.
- On note *p* le taux de remplissage.
- La stratégie optimale est pour r minimal tel que $p^{r+1}<1/2$. Ici r=6.
- Si p<1/2, alors on peut aller jusqu'à la destination avant de commencer à regarder.

Calculs

- Perte : d-i où d est la distance où on commence à chercher. On note q=1-p.
- Si on dépasse la cible, alors la perte est en moyenne : $1.q+2.pq+3.p^2q+\ldots=1/q$
- Il vient : $P_0=q.0+p.1/q$ et $P_r=q.r+p.P_{r-1}$, d'où $P_r=r+1+(2p^{r+1}-1)/q$ et $P_{r+1}-P_r=1-2p^{r+1}$.
- Remarque : le cerveau fait souvent ces calculs tout seul ...

Jeux à deux joueurs(ses)

- Dans la pratique, la plupart des situations mettent en jeu au moins deux personnes.
- Si les deux personnes collaborent, on peut se ramener à un jeu à un(e) seul(e) joueur(se), mais comment définir alors le gain de chacun(e) ?
- Que se passe-t-il si chacun(e) veut optimiser son gain ? Est-ce compatible avec un gain collectif ?

Dilemme du prisonnier

- Optimisation individuelle : notion d'équilibre de Nash.
- Différence suivant qu'on sait ou non que le jeu sera itéré, et combien de fois.
- Équilibres de Nash non-déterministes : le choix de la destination de vacances …

Équilibre de Nash

	C	D
C	(-1,-1)	(-5,0)
D	(0,-5)	(-4,-4)

Pas d'équilibre

	P	F	C
P	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
F	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
C	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Équilibre de Nash (stratégie mixte)

		A	
	choix	1	2
B	1	(4,1)	(0,0)
	2	(0,0)	(1,4)

Équilibre de Nash (stratégie mixte)

		A	P(A=2) ?
B		1	2
P(B=1**) ?**	1	(4,1)	(0,0)
	2	(0,0)	(1,4)

Espérance de gain de A : **P(**A=B=1**)**+4**P(**A=B=2**)**, i.e.

P(B=1**)**[1-**P(**A=2**)**]+4**P(**A=2**)**[1-**P(**B=1**)**], i.e.

[4-5**P(**B=1**)**].**P(**A=2**)**+**P(**B=1**)**

Espérance de gain de B: [4-5**P(**A=2**)**].**P(**B=1**)**+**P(**A=2**)**

Équilibre de Nash (stratégie mixte)

	A	1/5	4/5
B	choix	1	2
4/5	1	(4,1)	(0,0)
1/5	2	(0,0)	(1,4)

Espérance de gain de A :

[4-5**P(**B=1**)**].**P(**A=2**)**+**P(**B=1**)**

Espérance de gain de B:

[4-5**P(**A=2**)**].**P(**B=1**)**+**P(**A=2**)**

Équilibre de Nash (stratégie mixte)

	A	1/5	4/5
B	choix	1	2
4/5	1	(4,1)	(0,0)
1/5	2	(0,0)	(1,4)

Espérance de gain de A :

[4-5**P(**B=1**)**].**P(**A=2**)**+**P(**B=1**)**

Espérance de gain de B:

[4-5**P(**A=2**)**].**P(**B=1**)**+**P(**A=2**)**

- En général : compacité et convexité et théorème de point fixe (Kakutani, Brouwer).
- Ici : extremum d'une fonction affine.

Paradoxe de Condorcet

- Le paradoxe de Condorcet

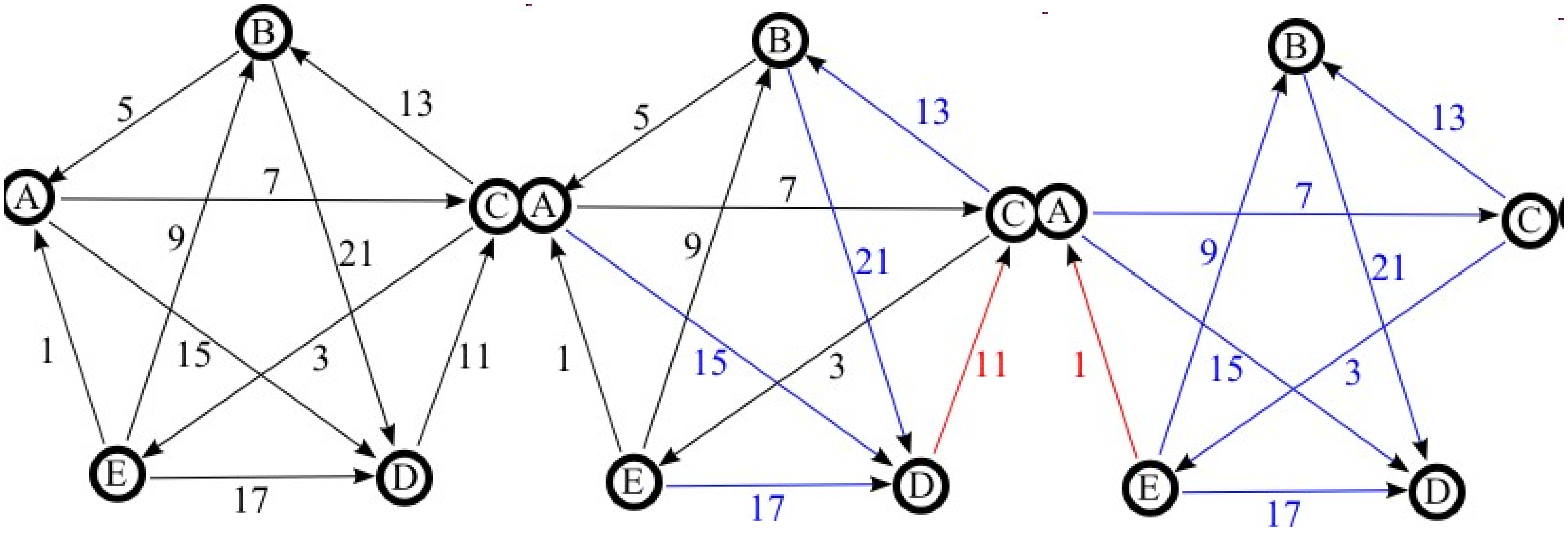
4	9	2
3	5	7
8	1	6

- Chaque ligne est battue par une autre ligne, mais l'emporte contre la troisième.
- Comme dans Pierre, Feuille, Ciseaux ! Équilibre de Nash : (1/3,1/3,1/3).

Choix social

- Dès qu’une alternative à plus de trois branches se présente, on est face au paradoxe de Condorcet ou de sa généralisation par Arrow.
- Vainqueur de Condorcet, et méthode des graphes orientés (vainqueurs des duels) : on efface les arêtes qui créent un paradoxe en gardant celles de plus grands poids.

Légende :
A → C : A l'emporte sur C de 7 voix



- On laisse 21, 17, 15 et 13, mais on élimine 11 à cause de la boucle(BCD).
- Au final A est vainqueur

Paradoxe de Arrow

- Paradoxe (théorème) de Arrow : si une constitution respecte l’unanimité et l’indépendance (ou la monotonie) alors c’est une dictature !
- Si tout le monde préfère a à b, alors c’est aussi le cas socialement.
- Si tout le monde améliore la place de a par rapport à b, alors c’est aussi le cas socialement.

Démonstration

- Si a et b sont classés de façon stricte par tout le monde et si c et d sont classés comme a et b par chacun, alors il en est de même collectivement.
- Si tout le monde préfère a à b, alors collectivement aussi. Le premier qui, en préférant b à a fait changer le résultat … est un dictateur.

Mensonge, hasard et majorité

- Méthode de Borda : donner des valeurs aux votes → intérêt à radicaliser le vote (mentir sur la valeur).
- Gibbard-Satterthwaite (1973) : quelque soit la méthode de choix social démocratique, à partir de trois options, il existe des situations où on a intérêt à mentir.
- Gibbard (1977) : seule la méthode stochocratique vérifie l'axiome d'unanimité et n'incite pas à mentir → mais pour deux options, ce n'est pas le scrutin majoritaire !

Statistiques et justice

Quelques questions

- Quelles autorités peuvent avoir d'informations de nature statistique?
- Peut-on se servir d'une probabilité comme élément de preuve lors d'un procès?
- Des indicateurs statistiques peuvent-ils servir de fondement à une décision politique?
- Comment peut-on se servir de statistiques en médecine ou en biologie ?

L’affaire Sally Clark

- Le 9 novembre 1999, au Royaume-Uni, Sally Clark est accusée d’avoir tué ses deux enfants :
  - Christopher, âgé de 11 semaines, le 13 décembre 1996 à 21h35.
  - Harry, âgé de 8 semaines, le 26 janvier 1998 à 21h27
- Le 2 octobre 2000, son appel est rejeté.
- Le 29 janvier 2003, elle est libérée en second appel.
- Le 15 mars 2007, elle est retrouvée morte chez elle, d'alcoolisme.

L’argument du Pr Meadow

« La probabilité que les deux nourrissons soient morts d’une Mort Subite du Nourrisson est très très faible, 1 chance sur 73 millions. C’est comme si un outsider côté à 80 contre 1 gagnait 4 années de suite le Grand Prix National »

(Le Grand Prix National est un concours hippique.)

Les bases de l'argument

- Le rapport du CESDI, intitulé SUDI, sur les morts inexpliquées chez les nourrissons, incluant les MSN, donne la proportion de nourrissons mourant de MSN dans une famille de non-fumeurs, ayant un revenu et dont la mère est âgée de plus de 26 ans, à savoir 1/8 543.
- Au Royaume-Uni il naît environ 650 000 enfants chaque année.
- Comme (1/8543)*(1/8543)≈1/73 000 000, cela fait qu'une famille environ par siècle ait à subir deux MSN, au Royaume-Uni.

Le « sophisme du procureur »

- C’est un paradoxe très largement débattu et dont il faut se méfier dès que l’on manipule des probabilités.
- L’argument fallacieux consiste à confondre « la probabilité qu’un événement survienne » avec « la probabilité qu’un événement soit survenu dans un cas étudié » .
- Ici c’est confondre « il y a une chance sur 73 millions qu’un double décès naturel survienne » avec « dans le cas d’un double décès, il y a une chance sur 73 millions qu’il soit naturel » …
- Être innocent d’un crime, c’est se trouver dans la situation où 1° une mort est survenue et 2° un événement extérieur (par exemple une mort naturelle inexpliquée) s’est produit.

Les probabilités conditionnelles

- Par conséquent pour évaluer la probabilité d'innocence (I) de Sally Clark, il faut évaluer la chance qu'il y ait un double décès inexpliqué (A) **sachant qu'il y a un double décès** (D).
- Autrement dit chercher **le nombre de fois qu'un événement rarissime se produit dans une population très restreinte** (celle de ceux qui ont subi un double décès) et non le nombre de fois qu'il se produit au sein de la population totale.

$$P(I)=P(A|D)=P(A\cap D)/P(D) \neq P(A)$$

Du rare au très rare

- Quand on analyse des événements rares l'important est de comparer le rare au très rare. Et pareillement avec les événements très probables.
- Une chose évidente qui n'a pas été faite était de calculer de la même façon le pourcentage de mères infanticides et récidivistes !
- Ainsi au Royaume-Uni environ 30 enfants sont tués par leur mère chaque année, un nombre comparable au nombre de MSN par an, ce qui fait que les deux hypothèses sont en fait à peu près aussi probables.

Un calcul sordide

- Nous prenons deux hypothèses : (A) les enfants de Sally Clark sont morts par accident, (M) Sally Clark les a tués. Nous négligeons les autres possibilités.
- En prenant 1/1300 comme probabilité pour une Mort Subite du Nourrisson, on peut penser que P(A) est supérieur à 10 fois (1/1300)*(1/1300), soit P(A) supérieur à 1/169000. Le facteur 10 représente le risque accru d'avoir une seconde mort subite du nourrisson sachant qu'il y en a déjà eu une. Le statisticien Ray Hill conduit des calculs montrant que le facteur 10 est un compromis entre des estimations donnant un facteur de risque accru compris entre 5 et 22.

Un calcul sordide

- Avec 30 infanticides par an et 650000 naissances par an, on peut penser que P(M) est inférieur à 1/20 fois 30/650 000, soit P(M) inférieur à 3/1300 000. Ce facteur 1/20 est très empirique. Il dit que si un meurtre a été commis, un second est plus probable, nettement plus probable que s'il n'y en avait pas eu avant. Si on ne le mettait pas, il faudrait calculer 30/650 000 au carré, autrement dit il faudrait multiplier 30/650 000 par lui-même, à savoir un nombre à peu près égal à 1/20 000. On considère ici que le sur-risque d'infanticide est au plus de 1000. Ray Hill l'estime à 176, ce qui est déjà énorme.
- On obtient : $P(A|D) \leq 1/(1+0,39) \approx 72\% \approx 2/3$.

A-t-on le droit de transformer la question posée « Sally Clark est-elle coupable ? » en une question quantifiée ?

- Assurément, non. L’indication statistique n’a pas d’autre vertu que de donner à réfléchir, stigmatiser les problèmes.
- Elle n’en résout aucun : c’est à l’être humain, par son analyse, de chercher les réponses.
- Idéalement, c’est en cherchant à comprendre la statistique que l’on peut découvrir des clefs que l’on avait omises …

Quel était l'objet du rapport SUDI dont s'est servi le Pr Meadow ?

- Il s'agit d'un rapport en vue de la prévention du risque de MSN, notamment d'un deuxième tel événement dans une même famille.
- La probabilité 1/8 543 est donnée en comparaison avec la probabilité 1/ 214 obtenue avec des parents fumeurs, sans revenu et avec une mère âgée de moins de 26 ans.
- Notamment, le rapport explicite : « Ainsi, pour les familles comportant plusieurs facteurs de risques pour la MSN, une seconde MSN, bien que très rare, est 1 600 fois plus probable que dans les familles dans ces facteurs. »

Mettre en balance les hypothèses

- **La statistique du rapport SUDI n’a de pertinence que si elle est utilisée pour comparer deux évènements** et c’est ainsi qu’elle est utilisée dans ce rapport.
- Et pourtant le Pr Meadow a marqué l’opinion publique en faisant croire
  - d’une part qu’il y avait 1 chance sur 73 millions pour que Sally Clark soit innocente,
  - d’autre part qu’en prouvant que les morts n’étaient pas des MSN, elles n’étaient pas naturelles.

La taille de la population testée ou questionnée

- Il n’est pas rare qu’en médecine les tests sur la foi desquels sont prises des décisions soient effectués sur des populations aussi petites que 5 individus.
- Par exemple l’étude SUDI analysait les doubles décès à travers l’étude de 24 familles.

Intervalles de confiance et Tests d’hypothèses

- Les intervalles de confiance permettent de quantifier le crédit que l’on apporte à une hypothèse ; ils sont d’autant plus larges que la population étudiée est petite.
- Dans l’exemple de l'étude SUDI, avec 24 personnes testées, on obtient des intervalles comme [0%,28.2%] …!
- On aimerait également pouvoir prédire si une quantité est plus grande qu’un autre avec le minimum de risque : donner deux intervalles de confiance qui se recouvrent est alors insuffisant.

Risque α

- Test à partir d'observations : tester si une hypothèse de référence, notée H_0, est raisonnable.
- Concrètement : estimation de la moyenne et calcul d'un intervalle I tel que la moyenne estimée appartient à I avec une grande probabilité si H_0 est vraie. Le « risque de 1ère espèce » est la probabilité de H_0 soit vraie mais que la moyenne attendue n'appartienne pas à I .
- Si la moyenne calculée appartient à I, on ne rejette pas H_0 et ce, avec un certain risque ; sinon, soit on effectue un autre test, soit on rejette H_0.
- Dans le cas d'un sondage, par exemple, on étudie les intentions de vote pour A et B et on obtient des proportions p_A et p_B. Pour savoir si l'écart entre les deux est significatif, on teste H_0 : $p_A=p_B$, ou plutôt on teste $p_A-p_B=0$.

Hypothèse alternative

- Quand on teste l'hypothèse de référence, on doit en général se placer dans une alternative, et définir une hypothèse H_1. Implicitement H_1 est prise comme la négation de H_0.
- Dans l'exemple précédent, H_1 serait « p_A est distinct de p_B ».
- Si on avait l'idée que B doit l'emporter, on aurait testé avec, pour H_1, « $p_A < p_B$ ». Dans ce cas on cherche un intervalle unilatéral

$$p_A \leq p_B - u_\alpha \sqrt{\frac{(p_A + p_B)(1 - p_A - p_B) + 4 p_A p_B}{n-1}}$$

- Soit par exemple, avec α=90% : 14%≤17%-2.4%, et, finalement, il est plus probable que B l'emporte. Par contre avec α=95%, le test devient : 14%≤17%-3.1%, et donc le risque que l'on a à parier que B l'emporte est supérieur à 5%, ce qui laisse un doute réel planer.

Risque β

- Le risque α est tout simplement le seuil du test. C'est la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.
- Maintenant supposons que H_0 soit fausse et, plus précisément, que H_1 soit vraie. Le risque β, ou risque de seconde espèce, est la probabilité d'admettre H_0 alors que H_1 est vraie.

Décision	Acceptation de H_0	Rejet de H_0
Si H_0 est vraie	Seuil de confiance $1-\alpha$	Seuil du test α
Si H_1 est vraie	Erreur de 2^{nde} espèce β	Puissance du test $1-\beta$

Interprétations

- Prendre moins de risque à réfuter H_0, conduit à prendre plus de risque à ne pas voir que c'est H_1 qui est vraie : augmenter α, c'est diminuer β.
- Pour pouvoir diminuer à la fois α et β, il faut recueillir plus d'informations : il faut augmenter *n*.
- On voit que les hypothèses H_0 et H_1 ne sont pas symétriques. Quand on effectue un test, on pense que H_0 est vraie et on se donne une alternative. Ou alors on pense que H_1 est vraie et on veut la mettre à l'épreuve avant de l'accepter.

Exemples

- Un exemple de risque α très important est donné par les tests en médecine : ne pas détecter une maladie mortelle est un risque que l'on peut difficilement prendre.
- Un autre exemple est fourni par les procédés industriels. Si un nouveau procédé est meilleur que le précédent, mais que sa mise en œuvre est excessivement coûteuse, on désire s'assurer que l'on ne fait pas tout ça pour trop peu. Et donc on prend α petit.
- Mais les risques β ne sont pas moins importants ! En médecine les conséquences du test peuvent ne pas être anodines, comme par exemple pour le HT21 …

Tests en médecine

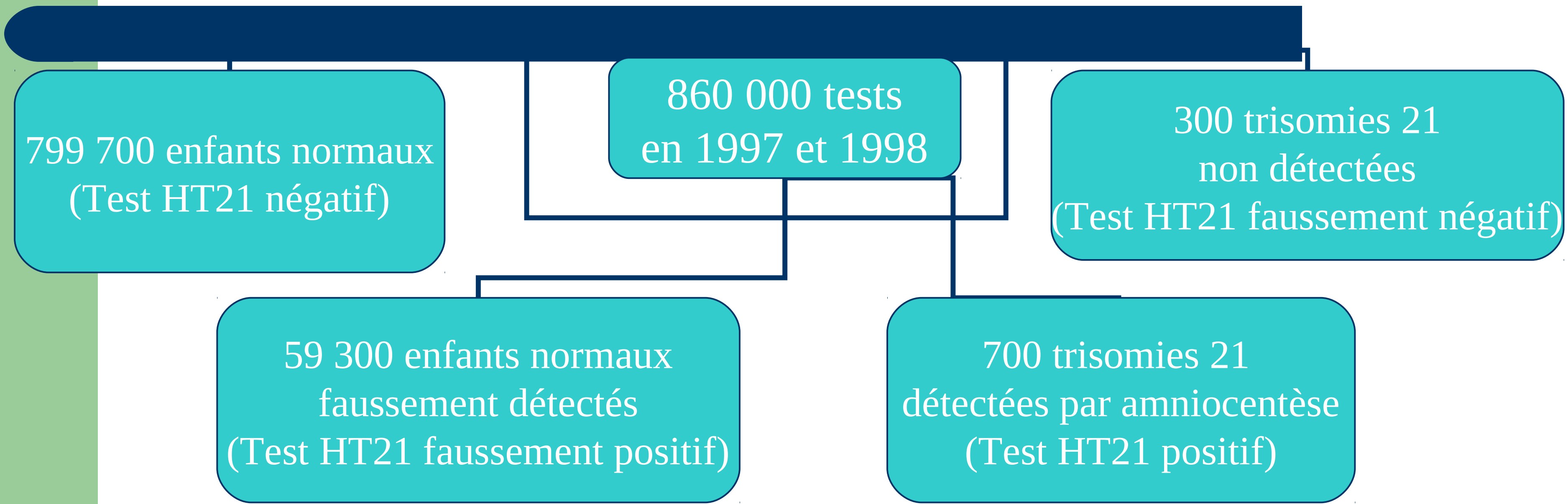
Le dosage HT21 ou « Triple test »

- Le dosage « Human Trisomy 21 » est un dosage sanguin de deux ou trois marqueurs pris dans le sang de la mère (entre 15 et 18 semaines d’aménorrhée).
- A partir de ces dosages est calculé un risque que l’enfant soit affecté d’une anomalie du chromosome 21.

Triple-test et Amniocentèse

- D’une part le triple-test ne détecte pas tous les fœtus atteint de trisomie 21, d’autre part, très souvent, il donne un résultat positif alors que le fœtus est normal : les modifications biologiques entraînées par une trisomie 21 ne sont ni systématiques, ni exclusives de cette pathologie.
- Lorsque le risque est supérieur à 1/250, une confirmation est fortement conseillée, par amniocentèse.

Quelques données



Tests positifs 7 %	dont 98.8% faussement	soit 6.9% des femmes testées
	dont 1.2% confirmés	soit 0.08% des femmes testées
		soit 70% des trisomies
Tests négatifs 93 %	dont 0.04% faussement	soit 0.03% des femmes testées
		soit 30% des trisomies
	dont 99.96% vraiment	soit 93% des femmes testées

Amniocentèse

- L’amniocentèse comporte des risques de fausse couche évalués à 1% environ.
- Elle est proposée aux femmes de plus de 38 ans et aux femmes dont le risque calculé est supérieur à 1/250. Elle est alors remboursée.
- Les autres femmes peuvent prendre à leur charge une amniocentèse, avec le coût et le risque de fausse couche que cela représente.

Les risques α et β

- On pratique un dosage HT21. Soit H_0 l'hypothèse « le risque est inférieur à 1/250 » et H_1 sa négation. Soit D_0 la décision « le fœtus est normal » et D_1 « le fœtus est atteint de trisomie 21 » .
- Avec les données précédentes, on a donc

$$\alpha=P(D_1|H_0)=0.04\%$$

et

$$\beta=P(D_0|H_1)=98.8\%$$

- On a donc réduit à l'extrême α, et par conséquent β est très élevé.

Théorie Bayesienne de la décision

- Plutôt que de fixer arbitrairement a, on peut introduire une notion de « coût » pour les risques α et β. Par exemple on peut évaluer le coût d'avoir accepté un lot de marchandises trop défectueuses (donc invendables) et celui de perdre un fournisseur alors qu'il avait respecté le cahier des charges.
- Si on observe une moyenne de χ, on donne un coût au rejet à tort de H_0 en fonction de χ et α, et un coût à l'acceptation à tort de H_0 en fonction de χ et β (i.e. de χ et α). Ce coût devient alors une variable aléatoire et on cherche à en minimiser l'espérance.
- Bien entendu dans le cas du test HT21, de tels coûts n'ont aucun sens …mais il reste des questions !

Quelques remarques polémiques

- Si l'on croit au risque dû à l'amniocentèse, il y a donc, sur 860 000 grossesses testées, 700 trisomies 21 détectées, 300 trisomies 21 non détectées et 600 fausses couches ayant entraîné la mort d'un enfant sain.
- Calculons donc la probabilité de chacun de ces événements sachant que la grossesse a été pathologique.

Trisomie 21 détectée	Trisomie 21 non détectée	Mort d'un enfant sain
44%±2.4%	19% ±1.9%	37% ±2.4%

On est loin du 70% qui donne confiance et on est un peu effrayé par le 37% de morts « inutiles ».

Le risque dû à l’amniocentèse

- Le risque de fausse couche dû à l’amniocentèse n’est pas uniforme : il y a des populations à risque. Par exemple lorsque l’utérus a développé un fibrome, le risque est plus élevé.
- En pratique le risque 1/100 ne représente pas grand-chose : il y a des femmes pour qui le risque est bien plus important alors que pour les autres le risque est réellement minime.
- Il faudrait donc approfondir cette étude.

Quelques références

- Thomas Ferguson
  - http://www.math.ucla.edu/~tom
- Images des maths
  - http://images.math.cnrs.fr
  - Notamment le café des maths, articles : Coïncidences, Décision.
- Collection « Le sel et le fer » chez Cassini
  - William Poundstone, Le dilemme du prisonnier
- John Geanakoplos
  - http://cowles.econ.yale.edu/P/cd/d11a/d1123-r3.pdf

MERCI DE VOTRE ATTENTION !

Modélisation – Règle d'arrêt

- $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ des variables aléatoires dont la distribution jointe est connue
- Dans le cas des secrétaires, X_i est le rang du i[ème] candidat parmi les i premiers.
- Pour les places, on prend pour X_i des variables de Bernoulli de paramètre p=0.9 : si elle est nulle, la place est libre, sinon elle est occupée.

Modélisation – Règle d'arrêt

- $(y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ des fonctions modélisant le gain en cas d'arrêt au temps n.
- Les fonctions y_i dépendent de i variables : les valeurs de X_i : $y_2(x_1,x_2)$ est le gain si on stoppe après avoir observé $X_1=x_1$ et $X_2=x_2$.
- Dans le premier cas : $y_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1)=i/n$
- Dans le second, Les y_i sont des pertes : d-i si $x_i=0$ et $+\infty$ si $x_i=1$ (sauf $y_d=1/(1-p)$ si $x_d=1$).

Modélisation – Règle d’arrêt

- On note N le temps d’arrêt (aléatoire), x_i les observations de X_i (de 1 à N).
- Une stratégie de décision (ϕ_0,ϕ_1,…ϕ_n,…) est une suite de probabilités d’arrêter le processus en N=n : ϕ_0, $\phi_1(x_1)$, $\phi_2(x_1,x_2)$, …
- Il s’agit d’optimiser la valeur moyenne du gain, appelée espérance de gain et notée $E(y_N(X_1,\ldots,X_N))$.
- Attention ! N est aléatoire !

Interdépendance des risques

- Prenons l'exemple de l'estimation d'une proportion p à partir d'une fréquence empirique f, avec H_0 : « $p=p_0$ » et, pour un certain $\delta>0$, H_1 : « $p=p_1=p_0+\delta$ ».
- Sous H_0, f suit une loi $N(p_0,\sigma)$ et sous H_1, f suit une loi $N(p_1,\sigma)$, avec σ^2 l'estimateur de la variance.
- Au risque α correspond un seuil t_α de sorte que l'on rejette H_0 si $|p-p_0|>t_\alpha\sigma$.
- Le risque β correspond au cas où $|p-p_0|<t_\alpha\sigma$ mais c'est H_1 qui est vraie. On a donc

$$\beta=P_{H_1}\left(\left|\frac{f-p_0}{\sigma}\right|<t_\alpha\right)=\int_{\frac{p_0-p_1}{\sigma}-t_\alpha}^{\frac{p_0-p_1}{\sigma}+t_\alpha} e^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$

- Par conséquent si α diminue, t_α augmente et donc β augmente.
- Par contre si n augmente, σ diminue, l'intégration se fait donc plus sur la « queue » de la gaussienne, et donc β diminue.
- La courbe de β en fonction de δ s'appelle Courbe des Caractéristiques Opérationnelles. C'est une courbe décroissante de 1 vers 0, passant par le point $(p_0+t_\alpha\sigma,1/2)$.

Christopher : les faits médicaux

- Christopher est d’abord reconnu comme étant mort de mort naturelle, due à une infection des voies respiratoires inférieures.
- Lors du procès le médecin ayant pratiqué l’autopsie revient sur son diagnostic et assure qu’il n’y a jamais eu aucun signe d’infection et que le bébé a été étouffé.
- Il se base sur des tests sanguins qu’il a menés à l’époque de la mort de Christopher mais dont il n’a pas fait référence dans son rapport post-mortem.

Christopher : les conclusions des experts du procureur

- Dr Williams : étouffement
- Pr Meadow : ni une infection des voies respiratoires inférieures, ni une « Mort Subite du Nourrisson » mais pas non plus une mort naturelle.
- Pr Greene & Dr Keeling : raison inconnue, mais cela pourrait être non naturel.

Christopher : les conclusions des experts de la défense

- Pr Berry & Dr Rushton : raison inconnue, c’est-à-dire une maladie non détectée, une mort non naturelle ou une « Mort Subite du Nourrisson ». Le rapport d’autopsie est trop incomplet pour donner lieu à des certitudes.
- Pr David : hémosiderosis pulmonaire idiopathique, mais une suffocation est possible.

Harry : les faits médicaux

- Des hémorragies (yeux, paupières et moelle épinière)
- Des lésions dans le cerveau
- Dislocation d'une côte
- Le rapport d'autopsie envisage que la mort a été provoquée par de violentes secousses, répétées plusieurs fois.
- Néanmoins la quasi-totalité des éléments énoncés dans le rapport d'autopsie sont sujet à caution, certains étant démontrés comme des artefacts (de la même façon que des **centaines** de jugements basés sur une analyse ADN sont en train d'être cassés car ils sont entachés d'erreurs de manipulation d'un laboratoire du FBI qui rend les tests totalement inutilisables).

Harry : les conclusions des experts du procureur.

- Dr Williams : secousses violentes et répétées.
- Pr Meadow : ni une « Mort Subite du Nourrisson », ni une mort naturelle, probablement un étouffement.
- Pr Greene & Dr Keeling : raison inconnue, mais cela pourrait être non naturel.

Harry : les conclusions des experts de la défense

- Pr Berry : si les preuves étaient sûres, la mort serait due à un traumatisme, mais ça pourrait être un accident.
- Dr Whitwell & Dr Rushton : raison inconnue, mais pas une « Mort Subite du Nourrisson ».
- Pr David : rapport d’autopsie trop incomplet pour donner lieu à des certitudes.

Les erreurs

- De façon assez remarquable, personne n'a jamais prétendu que les morts de Christopher et Harry étaient des MSN, puisqu'à chaque fois on a cherché à trouver des explications et qu'on a trouvé des éléments de réponse (par exemple Harry est mort 4 heures après avoir été vacciné). Le calcul même du Pr Meadow est sans objet !
- Le rapport 1/73 000 000 est erroné : les deux événements (1ère MSN et 2ème MSN) n'ont aucune raison d'être indépendants, et ont plutôt de nombreuses raisons de ne pas l'être !
- L'image du concours hippique est erronée car il n'y a pas 650 000 Grand Prix par an, mais un seul et on ne peut pas faire des statistiques sur un seul événement !

Pourquoi Sally Clark a-t-elle été libérée ?

- Contrairement à ce qu’on pourrait penser ou espérer, ce n’est pas grâce aux arguments précédents. Il a en fait été prouvé que les autopsies ont été pratiquées en dehors des normes de rigueur, notamment quant à la transmission des faits observés.
- Des analyses sanguines demandées pour Harry lors de l’autopsie avaient des résultats alarmants qui n’ont pas été communiqués. Seule la persévérance du mari et du père de Sally Clark a permis de les découvrir. On peut penser à partir de ces analyses qu’Harry est mort de méningite ou d’un autre type de maladie fulgurante liée au staphylocoque doré.